



TITLE:

# Conditional ExpectationsとTensor Product of Banach Spaces (無限次元空間のテンソル積)

AUTHOR(S):

梅垣, 寿春

---

CITATION:

梅垣, 寿春. Conditional ExpectationsとTensor Product of Banach Spaces (無限次元空間のテンソル積). 数理解析研究所講究録 1975, 228: 16-30

ISSUE DATE:

1975-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105409>

RIGHT:

## Conditional Expectations と Tensor Product of Banach Spaces

東工大 理 梅垣寿春

Banach 空間, 或いは一般な位相線型空間の間の Tensor 積に関する一般論は種々な立場から論じられているが, この報告では, 与えられた Banach 空間  $E$  に値をとる一つの確率量の解析を, 確率変数の生成する Banach 空間と Banach 空間  $E$  の間の Tensor 積を構成することによって行ない, この Tensor 積が手法として大変有効に適用されることなどを含めながら述べる。しかし内容の主体は Banach 空間に値をとる確率変数の Conditional Expectations を巡る部分である。そのために, この概念と通常の numerical な場合から論議する。

## § 1. Conditional Expectations の導入.

Conditional expectation は元来, 確率論における基本的概念であるが, それに対して種々な函数解析的手法が付加され, さらに様々な応用面が拓かれている。まずその構成から述べることにする。

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$  を確率測度空間とする (これはこの報告を通して固定する)。 $\mathcal{B}$  を  $\mathcal{A}$  の有限部分代数とする, つまり  $(\mathcal{B}, P)$  は確率事象系である。事象  $B \in \mathcal{B}$  ( $P(B) \neq 0$ ) が起ったという条件の下で事象  $A \in \mathcal{A}$  が起る確率は

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$$

によって与えられる。これによって

$$P(A/B) = \sum \chi_B \cdot P(A/B)$$

とおき, conditional probability of  $A$  relative to  $\mathcal{B}$  という。茲で  $\chi_B$  は  $B$  の定義函数,  $\sum$  は  $\mathcal{B}$  の atoms についての和とする。さらに, 一般的な, 有限の期待値をもつ確率変数  $f$  に対して

$$E[f/B] = \sum \frac{1}{P(B)} \int_B f(\omega) P(d\omega) \cdot \chi_B$$

とおき, これを Conditional expectation of  $f$  relative to  $\mathcal{B}$  という。ここで,  $f = \chi_A$  とおくと

$$P(A/\mathcal{B}) = E[\chi_A/\mathcal{B}].$$

Conditional expectations に関する重要な定式は

$$\int_B E[f/\mathcal{B}](\omega) P(d\omega) = \int_B f(\omega) P(d\omega), \quad \forall B \in \mathcal{B} \quad (1.1)$$

である。この式が conditional expectations の characterization である。以上では、 $\mathcal{B}$  を有限な部分代数と仮定したが、この仮定を取り去り、以下では常に  $\mathcal{B}$  を任意の (固定した)  $\sigma$ -部分代数とする。この一般的な  $\mathcal{B}$  に対しては上に述べた有限な場合の手法は不可となる。即し、ここで、函数解析的技法が用いられ、Radon-Nikodym の定理を応用して、次の基本定理が得られる。

定理 1.1.  $\forall f \in L^1(\Omega) = L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$  に対して、一意に函数  $E[f/\mathcal{B}] \in L^1(\mathcal{B}) = L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$  が存在して定式 (1.1) を満足する。

函数解析的立場において眺めるとき、 $E[\cdot/\mathcal{B}]$  は次の性質をもつことが知られる。Moy [4], Umegaki [8].

- 1°  $E[\cdot/\mathcal{B}]$  は Banach 空間  $L^1(\Omega)$  よりその内部分空間上への norm-one projection である,
- 2°  $E[\bar{f}/\mathcal{B}] = \overline{E[f/\mathcal{B}]}$ ;  $E[f/\mathcal{B}] \geq 0$  if  $f \geq 0$ ,
- 3°  $E[f g/\mathcal{B}] = E[f/\mathcal{B}] \cdot g$ ,  $\forall g \in L^\infty(\mathcal{B})$ ,

$$4^\circ \quad E[1/\mathcal{B}] = 1,$$

$$5^\circ \quad \int E[f/\mathcal{B}](\omega) P(d\omega) = \int f(\omega) P(d\omega).$$

Characterization Theorem として「 $3^\circ \sim 5^\circ$ 」を満たす, Conditional expectation とする」が与えられる. 条件  $3^\circ$  は歴史的にも意義ある定式で Reynolds 等式という. これは平均作用素などの中心的な条件でもある.

Conditional Expectations に因しては, 一般的な立場に立って構成することが可能であるが, 特に Von Neumann Algebras に因しては 1954 年 (Nakamura-Turumaru [5], Umegaki [8]) 以来, 理論が建設され, 様々な応用がなされて来た. この報告では Banach 空間に値をとる確率変数について論ずることになる. Von Neumann Algebras でなされたように Martingales の概念も当然導入され, それについて重要な特性化定理が述べられる. この場合の Conditional expectation の構成はこの Banach 空間の間の テンソル積が本質的に効力を発揮する. また, Conditional expectation とテンソル積の理論は易直化定理にも与えられ, それの数学的定式化が明らかになる.

## § 2. Banach Space Valued Random Variables.

確率測度空間  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  上で定義され Banach 空間  $E$  に値をとる確率変数  $f(\cdot)$  を考へる. この  $f(\cdot)$  が simple random variable であるとは,  $\Omega$  の有限可測分割  $\{A_i\} (\subset \mathcal{A})$  とベクトルの有限列  $\{\xi_i\} (\subset E)$  に対して

$$f(\omega) = \sum \chi_{A_i}(\omega) \xi_i \quad \text{a.e. } \omega \in \Omega,$$

と表示されているときを云う.  $f(\cdot)$  が strong random variable とは  $\exists \{f_n(\cdot)\}$ : simple random variables の列であり,  $\|f_n(\omega) - f(\omega)\| \rightarrow 0$ , a.e.  $\omega \in \Omega$ . この  $f$  の全体は線型空間をなす. ここで線型演算は a.e.-sense で定義されている, cf. Hille-Phillips の本 [2]. Strong の代りに weak-case が次のように定義される. 函数  $f: \Omega \rightarrow E$  が weak random variable とは,  $\xi^*(f(\omega)) = \langle f(\omega), \xi^* \rangle$  がすべての  $\xi^* \in E^*$  ( $=$  dual of  $E$ ) で可測である. よく知られているように, もし  $E$  が可分ならば, この両者の notion は同等である, 或いは, さらに一般に  $f$  の値域が可分 (mod  $P$ ) ならば同じく同等である.

次に  $L^p$ -空間 ( $1 \leq p < +\infty$ ) を定義する. Strong random variables  $f(\cdot)$  で

$$[f]_p = \left( \int_{\Omega} \|f(\omega)\|^p P(d\omega) \right)^{1/p} < +\infty$$

を満すもの全体を  $L^p(\Omega; E) = L^p(\Omega, \mathcal{A}, P; E)$  とおき、  
また

$$[f]_{\infty} = \operatorname{ess. sup}_{\omega \in \Omega} \|f(\omega)\| < +\infty$$

を満すもの全体を  $L^{\infty}(\Omega; E) = L^{\infty}(\Omega, \mathcal{A}, P; E)$  とおく。

これらは、それぞれノルム  $[\cdot]_p$  or  $[\cdot]_{\infty}$  によって

Banach 空間となる。

### § 3. Tensor 積 $L^1(\Omega) \otimes E$ .

任意の有限列の対  $\{x_i\} \subset L^p(\Omega)$  と  $\{\xi_i\} \subset E$  に対し

$$\sum_{i=1}^n x_i \otimes \xi_i = \sum_{i=1}^n x_i(\omega) \xi_i \pmod{P} \quad (3.1)$$

とおく。これは  $L^p(\Omega; E)$  の要素であり、この形の函数の  
全体を  $L^p(\Omega) \otimes E$  で表わす。つまり、これは二つの Banach  
空間  $L^p(\Omega)$  と  $E$  の間の代数的な Tensor 積であり、また  
 $L^p(\Omega; E)$  の dense な線型部分空間である。  $L^p(\Omega; E)$  におけ  
るノルム  $[\cdot]_p$  は cross norm である：

$$[x \otimes \xi]_p = \|x\|_p \cdot \|\xi\|, \quad x \in L^p(\Omega), \xi \in E,$$

cf. Schatten [6].  $L^p(\Omega) \otimes E$  のノルム  $[\cdot]_p$  によって

completion は  $L^p(\Omega)$  と  $E$  の間の Tensor product Banach 空間  $L^p(\Omega) \otimes E$  である。したがって

$$L^p(\Omega; E) = L^p(\Omega) \otimes E.$$

$\forall f \in L^p(\Omega; E)$  は Bochner 可積分である。即ち積分値  $\int f(\omega) P(d\omega)$  が  $E$  の要素として一意に存在する。

自然な identification

$$\xi = 1 \otimes \xi, \quad \xi \in E, \quad 1 = \chi_\Omega$$

によって range 空間  $E$  は  $L^p(\Omega; E)$  の閉部分空間と見做され、写像

$$f \rightarrow \int f(\omega) P(d\omega)$$

は norm-one projection  $L^p(\Omega; E) \rightarrow E$  (onto) である。

この報告の main は  $L^1(\Omega; E)$  と  $L^\infty(\Omega; E)$  に置くので、以下これら空間におけるノルムについての宝式を挙げる。Banach 空間  $L^1(\Omega; E)$  と  $L^\infty(\Omega; E)$  のノルムは Tensor 積ノルム (in Schatten's sense) として表わすことが可能である。有限列  $\{x_i\} \subset L^1(\Omega)$  or  $L^\infty(\Omega)$  及び  $\{\xi_i\} \subset E$  に対して  $\gamma$ -ノルムと  $\lambda$ -ノルムが次のように定義される:

$$N_\gamma\left(\sum_{i=1}^m x_i \otimes \xi_i\right) = \inf \sum_{j=1}^m \|y_j\|_1 \cdot \|\eta_j\|$$



$$N_\lambda \left( \sum_{i=1}^n x_i \otimes \xi_i \right) = \sup \sum_{i=1}^n \langle x_i, x^* \rangle \cdot \langle \xi_i, \xi^* \rangle$$

ここで  $\inf$  は  $\sum_{i=1}^n x_i \otimes \xi_i = \sum_{j=1}^m y_j \otimes \eta_j$  である全ての  $y_j \in L^1(\Omega)$  と  $\eta_j \in E$  について,  $\sup$  は  $\|x^*\|_\infty \leq 1$ ,  $\|\xi^*\| \leq 1$  である全ての  $x^* (\in L^\infty(\Omega)^*)$  と  $\xi^* \in E^*$  についてである. これらのノルム  $N_X$ ,  $N_\lambda$  は ノルム  $[\cdot]_p$  ( $p=1$  or  $\infty$ ) と同一のものである:

$$[\sum x_i \otimes \xi_i]_1 = N_X(\sum x_i \otimes \xi_i), \quad x_i \in L^1(\Omega)$$

$$[\sum x_i \otimes \xi_i]_\infty = N_\lambda(\sum x_i \otimes \xi_i), \quad x_i \in L^\infty(\Omega).$$

これによって  $L^1(\Omega; E) = L^1(\Omega) \otimes_\lambda E$  か  $L^\infty(\Omega) \otimes_\lambda E$  は  $L^\infty(\Omega; E)$  の閉部分空間である.  $L^\infty$ -空間 については 位相構造 だけでなく 意味ある 内積があるか については 省略する. 以上

#### § 4. Conditional Expectations of Strong Random Variables.

通常の Conditional expectations については §1 で既に述べたが, vector-valued の場合について 論ずる.

DEFINITION. Strong random variable  $E[f/\mathcal{B}]$  かん Strong random variable  $f$  の  $\mathcal{B}$  に 関する Conditional

expectation であるとは

(i)  $E[f/B]$  は  $B$  に関して可測で、かつ  
Bochner 可積分である、

$$(ii) \quad \int_B E[f/B](\omega) P(d\omega) = \int_B f(\omega) P(d\omega) \\ \text{for } \forall B \in \mathcal{B}.$$

ここで積分は Bochner-sense である。

Vector valued  $f$  の Conditional expectation が果して存在するかどうかは直ちに問題となる。通常の (scalar valued) の場合は Radon-Nikodym の定理を用いて、その存在が証明されるわけであるが、この場合はどうかというところが問題となる。所がこれが無条件に、この存在が可能となる。これの構成は

$$E[g \otimes \xi / B] = E[g/B] \otimes \xi, \quad g \in L^1(\Omega), \xi \in E$$

つまり  $f = g \otimes \xi$  の場合に (i), (ii) を検証し、これを linear-hull に拡大し、さらに  $\sigma$ -ルック  $N_\sigma$  の性質を用いて  $L^1(\Omega) \otimes E$  に有界性と保ちながら拡大して  $E$  が構成される。以上のように vector-valued  $f$  に対しては通常の

Radon-Nikodym の定理と Tensor 積の手法とを組み合わせることで conditional expectations の導入が何んの断りなく行われることを示される。cf. Umegaki-Bharucha-Reid [8]

## §5. Martingales of Strong Random Variables

Strong random variables の Conditional expectations が導入されたので, 直ちに vector-valued martingales の概念が定義されることになる.

Definition.  $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha \in D}$  は  $\mathcal{C}$  の  $\sigma$ -subalgebras の net であるとする. つまり  $D$  が有向集合で  $\alpha, \beta \in D$   $\alpha \leq \beta \Rightarrow \mathcal{B}_\alpha \subset \mathcal{B}_\beta$  とする. 同様に有向集合  $D$  を index として strong random variables の系  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in D} (\subset L^1(\Omega; E))$  が  $\{\mathcal{B}_\alpha\}$  に関して  $E$ -valued martingale であるとは

$$E[f_\beta / \mathcal{B}_\alpha] = f_\alpha, \text{ for } \alpha \leq \beta$$

を満すときをいう.

Example 1. 上記の Def. における  $\sigma$ -subalgebras  $\{\mathcal{B}_\alpha\}$  の net と任意の  $f \in L^1(\Omega; E)$  に対して

$$f_\alpha = E[f / \mathcal{B}_\alpha], \alpha \in D$$

とあくと,  $\{f_\alpha\} \subset L^1(\Omega; E)$  で  $\{\mathcal{B}_\alpha\}$  に関して  $E$ -valued martingale となる.

Example 2.  $\mu \in E$ -valued  $\sigma$ -additive 集合関数 (on  $\mathcal{C}$ ),  $\mathbb{P}$  を  $\Omega$  の有限可測分割  $\pi = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  ( $P(A_i) > 0$ ) 全体からなる族.

$\mathbb{P}$  における ordering を

$$\pi_1 \leq \pi_2 \iff \forall A \in \pi_2 \exists B \in \pi_1: A \subset B \text{ (P-mod)}$$

とおくと,  $\mathbb{P}$  は有向集合となる. さらに  $\forall \pi \in \mathbb{P}$  に対して

$$f_\pi(\omega) = \sum \chi_{A_i}(\omega) \mu(A_i) / P(A_i)$$

かつ  $\mathcal{B}_\pi = \sigma\text{-alg}[\pi]$  とおくと,  $\pi_1 \leq \pi_2 \iff$

$\mathcal{B}_{\pi_1} \subset \mathcal{B}_{\pi_2}$  で  $\{f_\pi; \pi \in \mathbb{P}\}$  は  $\{\mathcal{B}_\pi; \pi \in \mathbb{P}\}$  に関して  $E$ -valued martingale となる.

### § 6. Martingales の収束と Radon-Nikodym Property.

$E$ -valued martingales の収束に関する最も基本的な定理は次に述べるものである:

定理 6.1. (1)  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in D}$  を Example 1 で与えた Martingale とする. ならば

$$\int_{\Omega} \|f_\alpha(\omega) - f_\omega(\omega)\| P(d\omega) \rightarrow 0$$

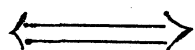
$$\text{すなわち } f_\omega = E[f / \sigma(\cup_{\alpha} \mathcal{B}_\alpha)] .$$

(2) Example 2 で,  $\mu(A) = \int_A f(\omega) P(d\omega)$ ,  $A \in \mathcal{G}$ , かつ  $f \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$  と仮定する. ならば

$$\int_{\Omega} \|f_\pi(\omega) - f(\omega)\| P(d\omega) \rightarrow 0 .$$

この定理 6.1, (2) は Radon-Nikodym 微分に関連しているのであるが, この性質を出て, 様々な議論が展開される. それらの内で, 大要 Clarified な結果が Chatterji [1] にまつて得られているのでそれについて述べて見る.

Definition. Banach 空間  $E$  が確率測度空間  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  に因って RN-property をもつ



$\forall E$ -valued  $\sigma$ -additive な  $\mathcal{A}$  上の集合関数  $\mu$  が

$$V(\Omega, \mu) = \sup \left\{ \sum \|\mu(A_i)\|; \{A_i\} \in \mathcal{P} \right\} < +\infty$$

( $= \mu$  の全変動) であり, 且つ  $\mu \ll P$  (すなわち  $P(A) = 0$  ならば  $\mu(A) = 0$ ;  $\mu$  は  $\mathbb{R}$  に因って絶対連続)

であるならば, つねに  $\mu(\cdot)$  は不定積分として表わされる, 即ち,  $\exists f \in L^1(\Omega; E)$ ;

$$\mu(A) = \int_A f(\omega) P(d\omega), \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

定理 6.2. [Chatterji]. Banach 空間  $E$  上の確率測度空間  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  を与えるとき, 次の 4 条件は互いに同等である.

(1°) Banach 空間  $E$  は  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  に因って RN-property をもつ,

(2°)  $E$ -valued martingales  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  について,  
 $\sup_{n \geq 1} \int \|f_n(\omega)\| P(d\omega) < +\infty$  ならば  $\lim f_n$  が  
 strong a.e. に存在する. この極限は  $\sigma(\cup B_n)$ -可測  
 である,

(3°)  $E$ -valued martingale  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  が一様可  
 積分 (すなわち,  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int \|f_n(\omega)\| \chi_{\|f_n\| > N}(\omega) P(d\omega)$   
 $= 0$ , unif. in  $n \geq 1$ ) であるならば  $f \in L^1(\Omega; E)$  が存在  
 して

$$\int_{\Omega} \|f_n(\omega) - f(\omega)\| P(d\omega) \rightarrow 0.$$

Chatterji [1] は他にも RN-property に関連して  
 収束条件をいくつか与えている.

Radon-Nikodym の定理は一般取測度空間に  
 おいて論ずるとき, 種々な可測構造との関連が現われ  
 て来るが, 函数解析的方面に立つとき  $L^2$ -Hilbert  
 空間上の multiplication operator algebra の極大性とか,  
 或いは Riesz の表現定理などの同値性が明らかに  
 されている. 例へば Segal [7] 参照. この point  
 を目標にして, この報告で論じて来たような vector-  
 valued の函数とか, 測度に対しても, このような同値性  
 が或程度可能となる. これらについては Hirahara [3]

を参照.

この報告の範囲より多少はみちがちで、詳しくは述べないが Nakamura-Tsurumaru に初まる  $C^*$ -algs. or  $W^*$ -algs. 間の Tensor 積, 或いは Nakamura-Takeda に初まる 接合積の理論なども, vector-valued な函数の形式に formulate することも可能である. 或いは, 全く内容的に異なってくるが, 情報理論における channels 構成が 実信号 measures の生成系 Banach 空間に値をとる函数として formulate されて行き Tensor 積の形式にも結びつけられて行くことが可能となってくる. 他にも二, 三の応用があるが ここでは省略させて置く.

## References

- [1] S. D. Chatterji, Martingale convergence and the Radon-Nikodym Theorem in Banach spaces, *Math. Scand.* 23 (1968), 21-41.
- [2] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups*. AMS Colloq. Pub. 31(1957).
- [3] Mieko Hirahara, On the generalized Radon-Nikodym Theorems and Riesz's representation Theorems. M. A. Thesis 1972, 2, 30 pp.
- [4] S-T C. Moy, Characterizations of conditional expectation as a transformation on function spaces, *Pacific J. Math.* 4(1954), 47-65.
- [5] M. Nakamura and T. Turumaru, Expectations in an operator algebra, *Tōhoku Math. J.* 6(1954).
- [6] R. Schatten, A Theory of Cross-Spaces. *Ann. Math. Studies.* 26(1950).
- [7] I. E. Segal, Equivalences of measure spaces, *Amer. J. Math.* 73(1951), 275-313.
- [8] H. Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra, *Tōhoku Math. J.* 6(1954), 177-181; II, *ibid* 8(1956), 86-100; III, *Kōdai Math. Sem. Rep.* 11(1959); IV, *ibid* 14(1962), 59-85.
- [9] H. Umegaki and A. T. Bharucha-Reid, Banach space-valued random variables and tensor product of Banach spaces, *J. Math. Analysis and Appls.* 31(1970), 49-67.